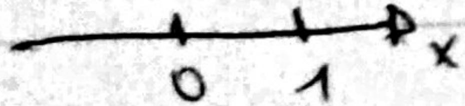
22/10/18

<u>Υπενθύμιση:</u> $\mathbb{R}^n$ διαν. χώρος με εσωτερικό γινόμενο

$$\bar{x}\cdot\bar{y} := \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i, \quad \text{όπου: } \bar{x} = (x_1, \ldots, x_n), \; \bar{y} = (y_1, \ldots, y_n)$$

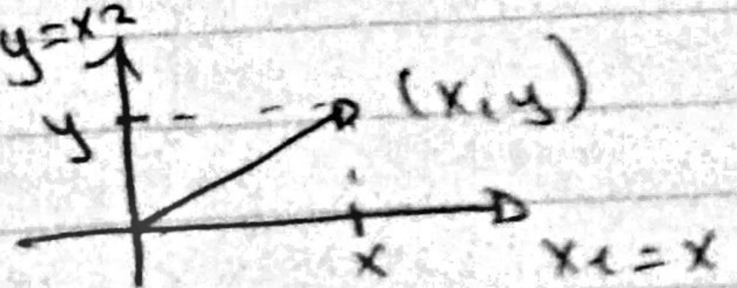
Το $\mathbb{R}^n$ (για $n=1,2,3$) μπορεί να αναπαρασταθεί <u>1-1 και επί με σημεία</u> των αντίστοιχων χώρων

$\boxed{n=1}$



$\bar{x} = (x_1) = (x)$

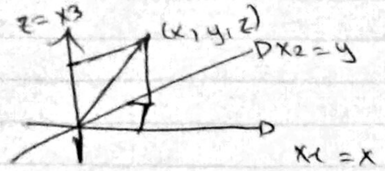
$\boxed{n=2}$



$\Rightarrow$

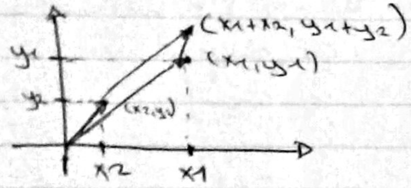
[Συνήθως, όταν μιλάμε για τον χώρο $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, φανταζόμαστε τον $\mathbb{R}^2$ (ή $\mathbb{R}^3$)]

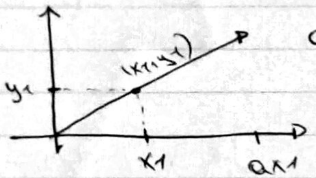
$\boxed{n=3}$



• Μ' αυτή την αναπαράσταση μπορούμε να «δούμε» τις πράξεις στον $\mathbb{R}^n$

(π.χ.) για $n = 2$





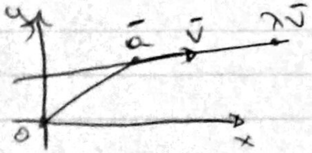
$a(x_1, y_1) := (ax_1, ay_1)$

$a > 1$

$\Downarrow$

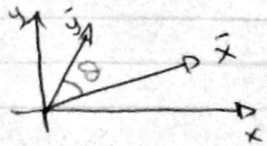
• Η ευθεία που περνάει από το $\bar{a}$ με κατεύθυνση $\bar{v}$ είναι η: $\{\bar{a} + \lambda\bar{v} : \lambda \in \mathbb{R}\}$

όπου $\bar{v} \neq \bar{0}$



• Τέλος, το εσωτερικό γινόμενο μπορεί να αναπαρασταθεί γραφικά ως $\cos\theta = \dfrac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{\|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|}$

όπου $\bar{x}, \bar{y} \neq \bar{0}$ και $\|\bar{x}\| = \sqrt{\bar{x} \cdot \bar{x}}$ με τη γωνία θ την κυρτή γωνία που σχηματίζεται από τα $\bar{x}$ και $\bar{y}$

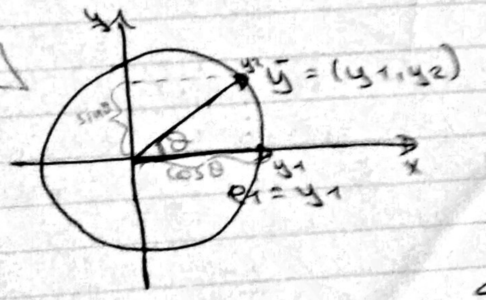


[Το πιο απλό παράδειγμα για να το «δούμε» αυτό είναι να θέσουμε στον $\mathbb{R}^2$ $\bar{x} = \bar{e}_1 = (1,0)$ και κάποιο $\bar{y}$ με $\|\bar{y}\| = 1$] αφού τότε: $\cos\theta = \dfrac{\bar{e}_1 \cdot \bar{y}}{\underbrace{\|\bar{e}_1\|}_{1}\,\underbrace{\|\bar{y}\|}_{1}} = \bar{e}_1 \cdot \bar{y} =$

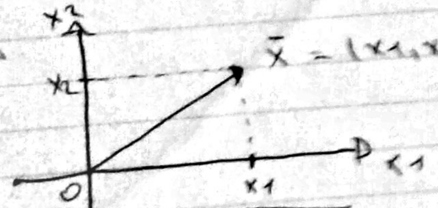
$= (1,0)\cdot(y_1,y_2) = y_1$

Από το εσωτερικό γινόμενο επάγεται μια νόρμα $\|\bar{x}\| := \sqrt{\bar{x}\cdot\bar{x}}$ και από αυτήν μια απόσταση μεταξύ των $\bar{x}$ και $\bar{y}$: $\|\bar{x}-\bar{y}\| \Rightarrow \|\bar{x}\| = \|\bar{x}-\bar{0}\|$ = η απόσταση του $\bar{x}$ από την αρχή των αξόνων

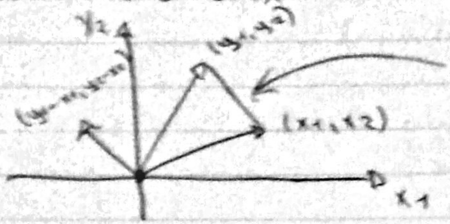
$\boxed{n=2}$



πχ $\boxed{n=2}$



με $\|\bar{x}\| = \sqrt{(x_1,x_2)\cdot(x_1,x_2)} = \sqrt{x_1^2+x_2^2}$ = η Ευκλείδεια απόσταση του σημείου $\bar{x}$ από το $\bar{0}$ (Πυθαγόρειο Θεώρημα) και αντίστοιχα



η απόσταση των (x_1,x_2) και (y_1,y_2) είναι το μήκος του διανύσματος $(y_1,y_2)-(x_1,x_2)$: Η απόσταση αυτή ονομάζεται Ευκλείδεια

Επίσης, εκτός από την Ευκλείδεια νόρμα

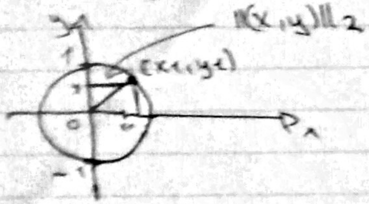
• $\|\bar{x}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} =: \|\bar{x}\|_2$ έχουμε ισάγει

και τη νόρμα ∞ $\|\bar{x}\|_\infty = \|(x_1,\dots,x_n)\|_\infty := \max\{|x_i| : i=1,\dots,n\}$ και τη νόρμα 1

$\|\bar{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ και είχαμε πει ότι είναι ισοδύναμες.

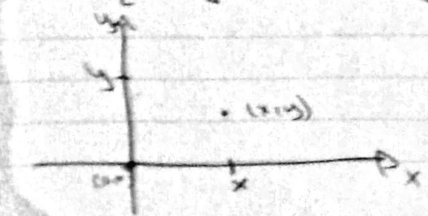
Για να τις «δούμε» γεωμετρικά, ας δούμε για $\boxed{n=2}$ τους μοναδιαίους κύκλους γι' αυτές τις νόρμες (κέντρου $(0,0)$)

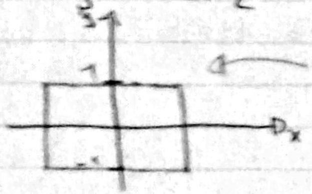
• $C_2 := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \|(x,y)\|_2 = 1\}$



• αντίστοιχος κύκλος για τη $\|\bar{x}\|_2$

• $C_\infty : \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \|(x,y)\|_\infty = 1\} = \max\{|x|,|y|\}$

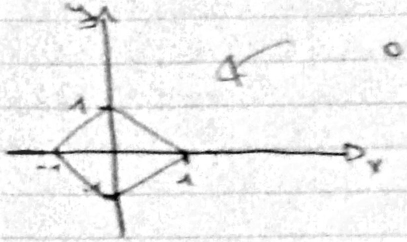




"αντίστοιχος" κύκλος για τη $\|\bar{x}\|_\infty$

—▷

• $C_1 := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{\|(x,y)\|_1}_{=|x|+|y|} = 1 \}$

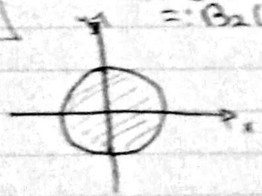


ο μοναδιαίος "κύκλος" για τη $\|\bar{x}\|_1$

→ ΑΣΚΗΣΗ: Από τις σχέσεις ισοδυναμίας για τις $\|\cdot\|_2, \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty$ προκύπτει για τις αντίστοιχες ανοιχτές μπάλες ακτίνας $r>0$ και κέντρου $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$,

$\underbrace{B(\bar{x}, r)}_{=: B_2(\bar{x},r)} := \{ \bar{y} \in \mathbb{R}^n : \underbrace{\|\bar{y}-\bar{x}\|}_{=: \|\bar{y}-\bar{x}\|_2} < 1 \}$ •

$\boxed{n=2}$



και αντίστοιχα για $B_\infty(\bar{x},r)$, $B_1(\bar{x},r)$

→ ΑΣΚΗΣΗ: Δείξτε ότι ισχύουν:

- $B_1(\bar{x},r) \subset B_\infty(\bar{x},r)$
- $B_2(\bar{x},r) \subset B_\infty(\bar{x},r)$
- $B_\infty(\bar{x},r) \subset B_1(\bar{x},n \cdot r)$
- $B_\infty(\bar{x},r) \subset B_2(\bar{x},\sqrt{n} \cdot r)$
- $B_1(\bar{x},r) \subset B_2(\bar{x},\sqrt{n} \cdot r$
- $B_2(\bar{x},r) \subset B_1(\bar{x},n \cdot r)$

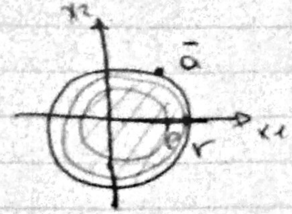
Για να καταλάβουμε τι λέει η ΑΣΚΗΣΗ ας δούμε την περίπτωση $\boxed{n=2}$ και $\boxed{\bar{x}=0}$

$B_2(\bar{0},r) = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x}\|_2 < r \}$ $(r>0)$

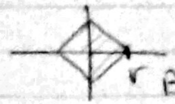
$B_1(\bar{0},r) = \{ \text{—"—} : \|\bar{x}\|_1 < r \}$

$B_\infty(\bar{0},r) = \{ \text{—"—} : \|\bar{x}\|_\infty < r \}$

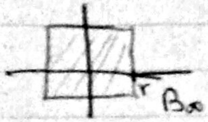
→



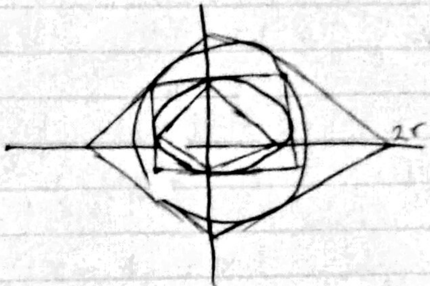
$B_{(2)}(\bar{0},r) = \bigcup_{\varrho\in[0,r)} C_{(2)}(\bar{0},\varrho) := \{\bar{x}\in\mathbb{R}^n : \|\bar{x}\| = \varrho\}$



$B_1(\bar{0},r)$



$B_\infty(\bar{0},r)$

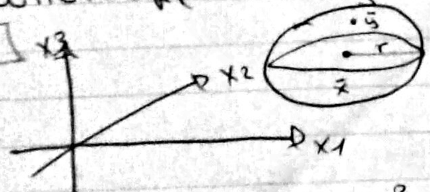


Ορίσαμε ήδη την ανοιχτή μπάλα κέντρου $\bar{x}$ και ακτίνας $r>0$

$B(\bar{x},r) := \{\bar{y}\in\mathbb{R}^n : \|\bar{x}-\bar{y}\| < r\}$ (ως προς την Ευκλείδεια νόρμα ή 2-νορμα $\|\bar{x}\|=\|\bar{x}\|_2$)

[σε γενικότερους χώρους $\mathbb{R}^n$, $n\geq 3$, συνήθως χρησιμοποιούμε την ορολογία του $\mathbb{R}^3$]

$\boxed{n=3}$



$$\underset{\boxed{n=3}}{B(\bar{0},r)} = \{(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3 : \underbrace{\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}}_{=\|\bar{y}\|} < r\} =$$

$$= \{(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3 : y_1^2+y_2^2+y_3^2 < r^2\} =$$

= μπάλα κέντρου $\bar{0}$ και ακτίνας r, ανοιχτή γιατί δεν περιέχει τη σφαίρα $\|\bar{y}\| = r$

$\boxed{n=1}$

$B(\underset{\underset{x}{\parallel}}{\bar{x}}, r) = \{ y \in \mathbb{R} : |y - x| < r \} = (x - r, x + r)$

Δεν κατάλαβα πως βγαίνει αυτό για $\boxed{n=1}$:

$B(\bar{x}, r) = \{ \bar{y} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x} - \bar{y}\| < r \}$

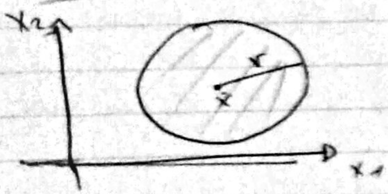
$\boxed{n=1}$ $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) = (x_1) = x_1 = x \in \mathbb{R}$ και

$\|\bar{x} - \bar{y}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2} \overset{\boxed{n=1}}{=} \left((x_1 - y_1)^2 \right)^{1/2} =$

$= |x_1 - y_1| = |x - y| \Rightarrow B(\bar{x}, r) = \{ y \in \underset{\mathbb{R}^1}{\mathbb{R}} : |x - y| < r \} =$

$= (x - r, x + r)$

$\boxed{n=2}$



$B(\bar{x}, r) =$ ανοικτός κυκλικός δίσκος κέντρου $\bar{x}$ ακτίνας r

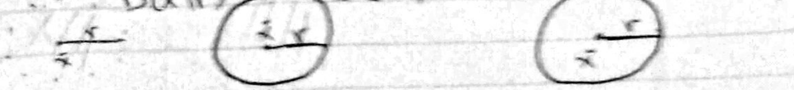
! Επίσης, εισάγουμε τις έννοιες της κλειστής μπάλας κέντρου $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ ακτίνας $r > 0$

$\bar{B}(\bar{x}, r) := \{ \bar{y} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{y} - \bar{x}\| \le r \}$ και τη σφαίρα κέντρου $\bar{x}$ ακτίνας $r > 0$

$\partial B(\bar{x}, r) := \{ \bar{y} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{y} - \bar{x}\| = r \}$

(προφέρεται d-ντι)

$\boxed{n=2}$ $B(\bar{x}, r)$ $\bar{B}(\bar{x}, r)$ $\partial B(\bar{x}, r)$



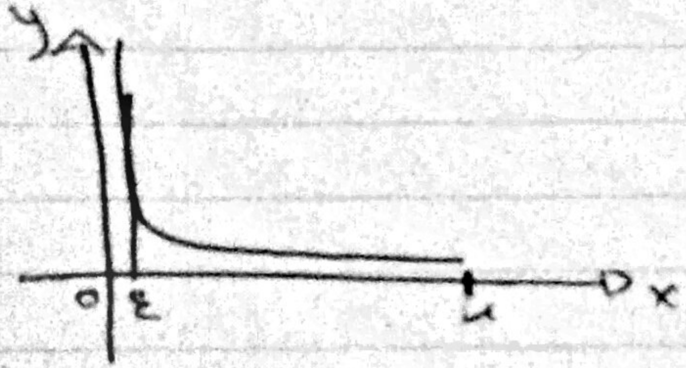
Ανοικτά και κλειστά σύνολα του $\mathbb{R}^n$:

Κίνητρο: Ποια η διαφορά των συναρτήσεων

$f: (0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$

$g: [\varepsilon,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x}$ $\left(\varepsilon \in (0,1)\right)$

και η f και η g είναι συνεχείς



Ορισμός: Ένα υποσύνολο $U \subset \mathbb{R}^n$ ονομάζεται
ανοικτό αν $\forall \bar{x} \in U \ \exists \ \varepsilon > 0 : B(\bar{x}, \varepsilon) \subset U$
κλειστό αν το $\mathbb{R}^n \setminus U$ είναι ανοικτό